Aleksandra Szymura

szymura.aleksandra@yahoo.com

„Teoria portfelowa H. Markowitza"

Za datę powstania teorii portfelowej uznaje się rok 1952. Wtedy to H. Markowitz opublikował artykuł zawierający szczegółowe informacje dotyczące tego zjawiska. Jest on powszechnie uznawany za prekursora tej teorii. Według niektórych badaczy, dokonując tego, Markowitz otworzył nowy rozdział w historii rozwoju finansów. Podstawową ideą tej teorii jest dążenie do stworzenia portfela inwestycyjnego z jak najwyższą stopą zwrotu oraz z jak najmniejszą rozpiętością możliwych wyników inwestycji.

Początkowo teoria ta nie zyskała przychylności wśród inwestorów. Powodem tego były zbyt skomplikowane i czasochłonne obliczenia, które należało wykonać. Dopiero pojawienie się komputerów sprawiło, że stała się bardzo popularna. W 1990 r., za ogromny wkład w rozwój finansów, Markowitz został nagrodzony Nagrodą Nobla w dziedzinie ekonomii.

Metodologia

Jak już zostało wcześniej wspomniano, korzystając z tej teorii, inwestorzy dążą przede wszystkim do uzyskania takiego portfela inwestycyjnego, który gwarantuje najwyższą stopę zwrotu i jednocześnie dąży do minimalizacji ryzyka. Na początku warto rozpocząć rozważania od wyjaśnienia dwóch podstawowych pojęć, które będą wykorzystywane w późniejszych rozważaniach.

Pierwsze z nich to tak zwana oczekiwana stopa zwrotu, dzięki której otrzymywana jest informacja o zyskowności portfela. Jeżeli nasz portfel zawiera n akcji, a każda z nich ma udział u_i oraz oczekiwaną stopę zwrotu r_i, to oczekiwaną stopę zwrotu całego portfela r_p można obliczyć za pomocą poniższego wzoru:

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} u_i \times r_i \ , \quad (1)$$ [1]

gdzie *i = 1,…,n*

Drugie z tych pojęć to wariancja stopy zwrotu z portfela akcji. Dzięki niej można ocenić ryzyko inwestycji zawartych w portfelu. Jeżeli wariancja każdej z akcji jest równa σ_i^2 , a kowariancja stóp zwrotu z i-tej oraz j-tej akcji wynosi γ_{ij}, to wariancję stopy zwrotu całego portfela σ_p^2 można obliczyć za pomocą wzoru:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i \times u_j \times \gamma_{\,ij} \qquad (2)$$

gdzie *i = 1,…,n* oraz *j = 1,…,n*

Konstrukcja efektywnego portfela akcji

W poprzednim rozdziale zawarte zostały informacje jak prawidłowo ocenić zyskowność oraz ryzyko inwestycji. Obie te czynności są bardzo ważne przy stworzeniu portfela efektywnego. Teoria Markowitza zakłada maksymalizację zyskowności oraz minimalizację ryzyka. Inwestor powinien dążyć do osiągnięcia takiego portfela inwestycyjnego, który jednocześnie będzie miał najwyższą możliwą oczekiwaną stopę zwrotu oraz najniższą wariancję stopy zwrotu. W praktyce jest to tak naprawdę nierealne. Nie da się uzyskać portfela spełniającego powyższy warunek. Dlatego sposób postępowania doboru akcji wygląda nieco inaczej. Na początku określa się pewien poziom oczekiwanej stopy zwrotu *r*, który chcemy osiągnąć. W dalszej kolejność dobiera się akcje w taki sposób, aby ich oczekiwana stopa zwrotu była zbliżona do założonej przez nas, a jej wariancja była najniższa spośród wszystkich portfeli o takiej samej oczekiwanej stopie zwrotu. Dzięki temu uzyskamy efektywny portfel inwestycyjny.

Sytuacja nie jest aż tak bardzo skomplikowana, gdy mamy portfel zawierający akcje dwu lub trzech spółek. Korzysta się wówczas z metody mnożników Lagrange'a wyznaczania ekstremów warunkowych. Najczęściej jednak inwestorzy w swoich portfelach inwestycyjnych posiadają akcje kilku, a czasem nawet kilkunastu spółek giełdowych. Obliczanie powyższą metodą jest w tej sytuacji bardzo pracochłonne, dlatego poniżej pokazany zostanie ogólny sposób wyznaczania portfela efektywnego o określonej przez nas oczekiwanej stopie zwrotu.

---

[1] Wszystkie wzory w referacie zostały zaczerpnięte z podręcznika „Rynki, instrumenty i instytucje finansowe" pod red. Jana Czekaja

Przykładowo inwestor w swoim portfelu ma do wyboru akcje N spółek. Można założyć, że r_i to oczekiwana stopa zwrotu i-tej akcji, a u_i to jej udział w portfelu, przy czym $i = 1,\ldots, N$. Dodatkowo można stwierdzić, że znana jest także wariancja σ_i^2 oraz kowariancja γ_{ij} stóp zwrotu z tych akcji. Na podstawie tych informacji stworzona zostanie macierz V. Jest to tak zwana macierz wariancji-kowariancji.

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \gamma_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Oprócz tego dodatkowo stworzono następujące oznaczenia dla ułatwienia obliczeń:

$$\mathrm{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} \qquad \mathrm{s} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} \qquad 1_\mathrm{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości uzyskano wzory (1) oraz (2) tyle tylko, że zostały one zapisane w postaci macierzowej. Tym sposobem oczekiwana stopa zwrotu z portfela inwestora r_p wynosi:

$$r_p = u^T \times s$$

Wariancja stopy zwrotu σ_p^2 wynosi w tej sytuacji:

$$\sigma_p^2 = u^T \times V \times u$$

To jednak jeszcze nie koniec obliczeń. Warto wspomnieć, że inwestorów interesuje tylko i wyłącznie uzyskanie takiego portfela, dzięki któremu ich zyski będą rosły. W tym momencie ważne jest poznanie takich wartości poszczególnych udziałów akcji ($u_1, \ldots, u_N$), aby portfel inwestycyjny o oczekiwanej stopie zwrotu R był efektywny. Z pewnością problem może stanowić uzyskanie tych wartości. Należy rozpatrzyć w tej sytuacji trzy główne warunki:

a) $u^T \times s = R$

b) $u^T \times 1_N = 1$

c) $\sigma_p^2 \rightarrow min$

O ile rozwiązanie dwóch pierwszych warunków nie powinno stanowić żadnych problemów, to w przypadku trzeciego mogą pojawić się komplikacje. Musimy znaleźć minimalną wartość dla wariancji stopy zwrotu tego portfela σ_p^2. Aby ją uzyskać, należy wyznaczyć minimum warunkowe σ_p^2. Zastosowana zostanie w tej sytuacji wspomniana już we wcześniejszych rozważaniach metoda mnożników Lagrange'a. Należy ona jednak do pracochłonnych, dlatego przedstawiony zostanie będzie tylko końcowy efekt, a nie poszczególne etapy wyprowadzania poszczególnych wzorów. W tej sytuacji wprowadzono kilka dodatkowych oznaczeń:

$$A = s^T \times V^{-1} \times 1_N$$

$$B = s^T \times V^{-1} \times s$$

$$C = (1_N)^T \times V^{-1} \times 1_N$$

$$D = B \times C - A^2$$

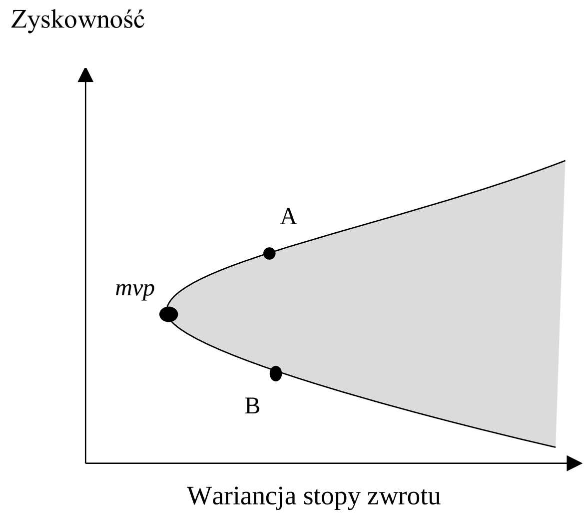
Po wykonaniu odpowiednich przekształceń, uzyskany został wzór:

$$u = \frac{1}{D} \times (B \times V^{-1} \times 1_N - A \times V^{-1} \times s) + \frac{1}{D} \times (C \times V^{-1} \times s - A \times V^{-1} \times 1_N) \times R\,. \quad (3)$$

Dzięki niemu można obliczyć udział akcji w portfelu efektywnym o oczekiwanej stopie zwrotu R. Jest to zarazem efekt końcowy rozważań tego rozdziału. Teraz można już podjąć próbę wyznaczenia portfela efektywnego. W tej sytuacji na co dzień korzysta się z programów komputerowych. Bardzo pomocny, a zarazem prosty w użytkowaniu, jest w tym przypadku Excel. W kolejnych rozdziałach zostanie podany prosty przykład, jak przy jego użyciu, mając do dyspozycji kilka spółek akcji, stworzyć własny portfel efektywny.

Zbiór efektywny

To jednak jeszcze nie całkowity koniec rozważań na temat teorii portfelowej. Warto także zapoznać się z pojęciem zbiór efektywny. Zależność pomiędzy zyskownością, a ryzykiem, które jest mierzone za pomocą wariancji, na wykresie jest opisywane jako parabola. Zbiór efektywny jest to zbiór ograniczony właśnie przez tę parabolę. Wyznacza takie portfele, które mają możliwie najniższą wariancję dla zadanej przez nas oczekiwanej stopy zwrotu. Poniżej (rysunek 1) został zaprezentowany kolorem szarym zbiór efektywny dla określonej przez nas oczekiwanej stopy zwrotu *R*.



Rysunek 1. Zbiór efektywny
Źródło: opracowanie własne

Warto jednak w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że nie każdy portfel inwestycyjny należący do zbioru efektywnego jest atrakcyjny dla potencjalnych inwestorów. Na rysunku 1 zaznaczono dwa punkty: A i B. Choć każdy z nich ma taką samą wariancję stopy zwrotu (obarczone jest takim samym ryzykiem), to tak naprawdę tylko jeden z nich, znajdujący się w punkcie A, jest portfelem efektywnym. Można sobie zadawać pytanie dlaczego tak jest. Otóż, portfel zaznaczony punktem A ma większą najwyższą możliwą oczekiwaną stopę zwrotu w porównaniu z portfelem oznaczonym jako B biorąc pod uwagę tę samą wartość ryzyka. Można stwierdzić, że połowa zbioru efektywnego znajdująca się powyżej punktu *mvp* (portfel o najmniejszej możliwej do osiągnięcia wariancji) zawiera takie portfele inwestycyjne, które przy określonym poziomie wariancji cechuje najwyższa możliwa oczekiwana stopa zwrotu. Druga połowa zbioru efektywnego, znajdująca się poniżej tego punktu, zawiera portfele mające najniższą możliwą do uzyskania oczekiwaną stopę zwrotu. Często górna połowa tego zbioru określana jest mianem granicy efektywnej, a dolna połowa to tak zwana granica nieefektywna.

Teoria Markowitza w praktyce

Po zaznajomieniu się z częścią teoretyczną dotyczącą teorii portfelowej, czas wykorzystać tę wiedzę w praktyce. Zostanie zaprezentowany przykład, który pozwoli nam wyznaczyć udziały akcji w taki sposób, aby w rezultacie otrzymać portfel efektywny.

Przykład[2]

Pewien inwestor ma do wyboru akcje spółek: RAFAKO, BZWBK, INGBSK, VISTULA oraz MOSTALWAR. Wiadomo, że na GPW jest znacznie większy wybór, jednak dla ułatwienia obliczeń posłużymy się portfelem kilku składnikowym. Dla większej ilości spółek obliczenia wykonuje się analogicznie.

Już na samym początku mogą pojawić się problemy z wyznaczeniem wartości oczekiwanej stopy zwrotu z danej akcji. Niestety, rzadko kiedy jest ona podana. W tej sytuacji trzeba ją oszacować. Zazwyczaj pobiera się odpowiednie dane ze stron giełdowych. W tym przypadku zostały pobrane dane z lat 1994 – 2015. Oczywiście nie muszą być one z wszystkich lat występowania danej spółki na giełdzie. Można ograniczyć się tylko przykładowo do ostatnich pięciu, dziesięciu lat.

Jeżeli dane zostały już pobrane, należy je oszacować. W tym celu posłużą nam dwa poniższe wzory. Pierwszy z nich dotyczy wartości oczekiwanej, a kolejny jej wariancji.

1) $\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} r_t$

2) $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} (r_t - \bar{r})^2$

Łatwiej jest jednak dokonywać obliczeń w programie Excel. My także, rozwiązując ten przykład, skorzystamy z funkcji tego programu.

Dla powyższych spółek, wartości oczekiwanej stopy zwrotu wynoszą: r_{RAFAKO} = 2,67%, r_{BZWBK} = 7,55%, r_{INGBSK} = 4,42%, $r_{VISTULA}$ = 3,47%, $r_{MOSTALWAR}$ = 4,27%, natomiast ich wariancje: σ^2_{RAFAKO} = 0,00107, σ^2_{BZWBK} = 0,00078, σ^2_{INGBSK} = 0,00058, $\sigma^2_{VISTULA}$ = 0,00107, $\sigma^2_{MOSTALWAR}$ =0,00110.

Ustalmy, że nasza oczekiwana stopa zwrotu, to znaczy taka, jaką chcielibyśmy osiągnąć, wynosi 0,06%. Do obliczenia poszczególnych udziałów akcji znajdujących się w naszym portfelu inwestycyjnym posłuży nam dodatek programu Excel – SOLVER. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń widzimy, że nasz efektywny portfel inwestycyjny składa się z 53,784% akcji firmy BZWBK, 24,657% akcji spółki INGBSK, 12,365% akcji MOSTALWAR oraz 9,194% akcji spółki

[2] Przykład wykonany na potrzeby projektu – obliczenia własne

VISTULA. Nie powinniśmy posiadać w tej sytuacji akcji spółki RAFAKO. Wariancja całego portfela, czyli wartość ryzyka, wynosi 0,00046.

Podsumowanie

Podsumowując teoria portfelowa Markowitza, pomimo tego, iż często w wykonywaniu obliczeń musimy bazować na szacowaniu wartości (korzystanie z odpowiednich estymatorów), niż na dokładnych wyliczeniach, jest jedną z najczęściej stosowanych współcześnie teorii wśród inwestorów. Pokazuje nam jak w łatwy sposób stworzyć swój własny efektywny portfel inwestycyjny. Warto jednak także pamiętać o fakcie, iż teoria ta opiera się na danych z przeszłości, co nie znaczy, że są one adekwatne do przyszłości. Musimy być ostrożni, bo jak powszechnie wiadomo, na giełdzie nic nie jest do końca w stu procentach pewne.

Bibliografia

https://www.nbportal.pl/slownik/pozycje-slownika/teoria-portfelowa

http://www.motte.pl/analiza_portfelowa.php

Czekaj Jan, *Rynki, instrumenty i instytucje finansowe*, Warszawa, PWN, Rozdział 16.1, *Teoria portfelowa,* ISBN 978-83-01-15297-0, s.383 – 396.